II / CONDUCTEURS EN EQUILIBRE

الـــنـــوا قـــل الـــمـــتـــوا زنـــة

A/ DEFINITION ET PROPRIETES DES CONDUCTEURS EN EQUILIBRE (تعريف النواقل المتزنة و خصائصها):

Rappelons d'abord, qu'un conducteur électrique est tout corps dans lequel les porteurs de charges peuvent se déplacer librement.

1/ Définition : Un conducteur est dit en équilibre électrostatique si les charges qu'il renferment sont en état de repos.

2/ Propriétés des conducteurs en équilibre :

- Puisque les charges à l'intérieur du conducteur en équilibre sont au repos, elles ne sont donc soumise à aucune force, cela veut dire que le champ électrostatique dans le conducteur en équilibre est nul.

$$\vec{F} = q.\vec{E} = \vec{0} \Rightarrow \boxed{\vec{E} = \vec{0}}$$

- Le vecteur champ électrostatique est perpendiculaire à la surface du conducteur en équilibre : ceci s'explique par le fait que les lignes de champ sont, d'une part, tangentes au vecteur champ, et d'autre part perpendiculaires au plan.

- Le conducteur en équilibre constitue un volume équipotentiel : On a déjà vu que la différence de potentiel entre deux points M et M' est définie par la relation $dV = -\vec{E}.\vec{dl}$, et puisque $\vec{E} = \vec{0}$, cela implique que le potentiel est constant en tout point intérieur au conducteur en équilibre. En conséquence, la surface externe du conducteur est une surface équipotentielle, ce qui prouve que le champ est perpendiculaire à la surface du conducteur.

- La charge dans le conducteur en équilibre est nulle, elle se concentre sur la surface du conducteur : En effet, et puisque le nombre de protons est égal au nombre d'électrons, la charge totale à l'intérieur du conducteur est nulle. Toutes les charges libres se répartissent sur une surface qui occupe une épaisseur constituée de quelques couches d'atomes (ici, le mot surface ne doit pas être compris au sens géométrique). Les charges électriques en mouvement s'accumulent sur la surface jusqu'à ce que le champ qu'elles produisent devienne égal au champ électrique extérieur appliqué à cette surface, ce qui conduit à un état d'équilibre.

3/ Théorème de Coulomb (نظرية كولومب) :

Au voisinage d'un conducteur en équilibre, le champ est perpendiculaire à la surface du conducteur et son intensité vaut $E = \dfrac{\sigma}{\varepsilon_0}$, σ étant la densité surfacique du conducteur.

Cette expression donne la valeur du champ électrique en un point proche de la surface et à l'extérieur du conducteur, alors que le champ à l'intérieur est nul. Sur la surface le champ prend une valeur moyenne E_{moy}.

Le résultat de ce qui vient d'être dit est qu'à la traversée de la surface du conducteur, le champ électrique varie comme indiqué sur la figure 2.1

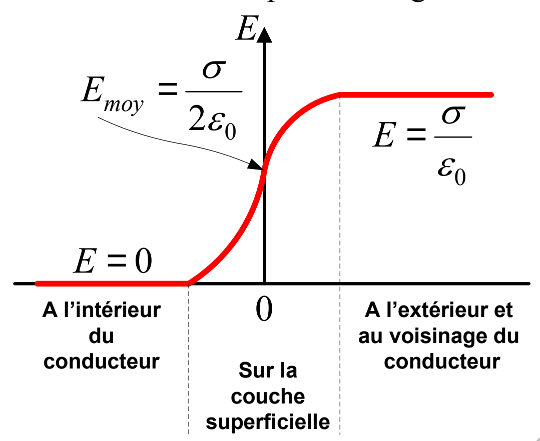


Fig 2.1 : Variation du champ électrique à la traversée de la surface du conducteur

En peut résumer les propriétés du conducteur en équilibre par la figure 2.2.

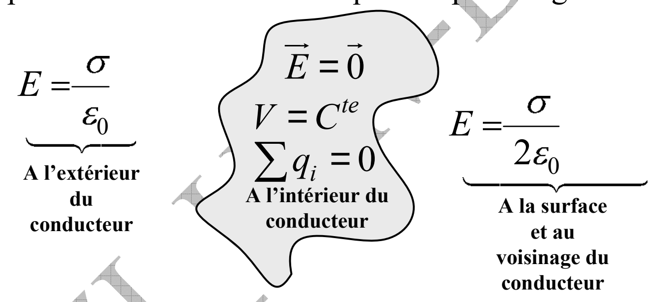


Fig 2.2 : Propriétés du conducteur en équilibre

4/ Pression électrostatique (الضغط الكهروساكن) :

- **Définition** : la pression électrostatique est la force électrique appliquée sur l'unité de surface.
  (Cette force résulte de la répulsion entre les charges sur la surface et les autres charges).

$$\boxed{p_e = \frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0}} \qquad \textbf{(2.1)}$$

Raisonnement : L'expression de la force élémentaire $d\vec{f}$ appliquée sur la surface élémentaire extérieure $d\vec{S}_{ext}$ d'un conducteur qui porte sur sa surface une charge élémentaire $dq = \sigma . dS_{ext}$ est :

$$d\vec{f} = dq.\vec{E}_{moy} = \sigma . d\vec{S}_{ext} . \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

D'où :

$$d\vec{f} = \frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0}.d\vec{S}_{ext} \Rightarrow \frac{d\vec{f}}{d\vec{S}_{ext}} = p_e = \frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0}$$

Au vu de l'expression de la pression électrostatique, on en déduit que c'est une grandeur scalaire, et qu'elle est toujours positive. Cette pression peut être considérée aussi comme étant la force capable d'arracher les charges au conducteur.

L'unité de la pression électrostatique : Le pascal (Pa).

5/ Pouvoir des pointes (قدرة السطوح الحادة) :

Les charges ont tendance à s'accumuler sur les surfaces en pointe (c'est à dire celles dont le rayon de courbure est petit). Nous allons expliquer ceci dans l'exemple suivant :

La figure 2.3 représente deux conducteurs de forme sphérique, chacun avec ses caractéristiques, reliés par un fil.

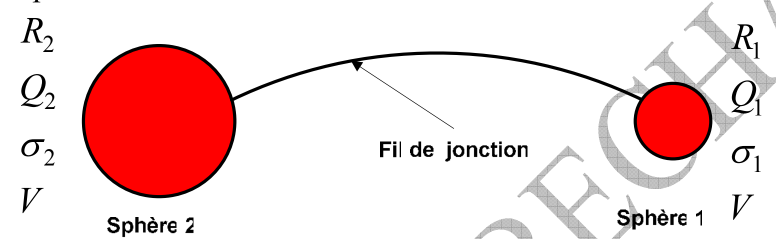


Fig 2.3 : Pouvoir des pointes

Les sphères sont au même potentiel V :

$$V = K\frac{Q_1}{R_1} = K\frac{Q_2}{R_2}$$

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\sigma_1.4\pi R_1^2}{R_1} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\sigma_2.4\pi R_2^2}{R_2} \Rightarrow \sigma_1 R_1 = \sigma_2 R_2$$

Puisque $R_2 \succ R_1$, donc $\sigma_1 \succ \sigma_2$: cela est la preuve que les charges ont tendance à s'accumuler sur les surfaces pointues. On trouve leurs applications dans :

Par mesure de sécurité, des paratonnerres sont fixés sur les immeubles, ou sur tout autre type de construction, et qui sont reliés à la terre par l'intermédiaire de fils conducteurs. Leur rôle est d'attirer des charges accumulées dans l'air et les décharger dans la terre. Si les conditions pour l'éclatement d'un tonnerre sont réunies autour de la construction, les charges préfèrent se diriger vers la pointe du paratonnerre d'où elles sont conduites vers le sol. Les hautes constructions sont ainsi protégées contre les tonnerres.

Il en est de même pour les bords métalliques pointus attachés aux ailes d'avions qui permettent la décharge continue de l'air des charges électriques.

6/ Capacité propre d'un conducteur isolé (السعة الذاتية لناقل منفرد في الفضاء) :

- **Définition** : la capacité électrique d'un conducteur isolé est le rapport entre sa charge et son potentiel :

$$\boxed{C = \frac{Q}{V}} \qquad \textbf{(2.2)}$$

Par exemple : La capacité d'un conducteur sphérique placé dans le vide, dont le potentiel est $V = K\frac{Q}{R}$, est égale à :

$$C = \frac{Q}{V} = 4\pi\varepsilon_0 . R$$

Si l'isolant entourant le conducteur sphérique est autre que le vide, alors là, sa capacité est $C = 4\pi\varepsilon . R$, où ε est la permittivité de l'isolant.

Généralisation : On peut généraliser la notion de capacité à un ensemble de conducteurs. Dans le cas de deux conducteurs portant deux charges $+Q$ et $-Q$, dont la différence de potentiel entre elles est $U = V_1 - V_2$ (figure 2.4), la capacité du système est :

$$C = \frac{Q}{V_1 - V_2} = \frac{Q}{U}$$

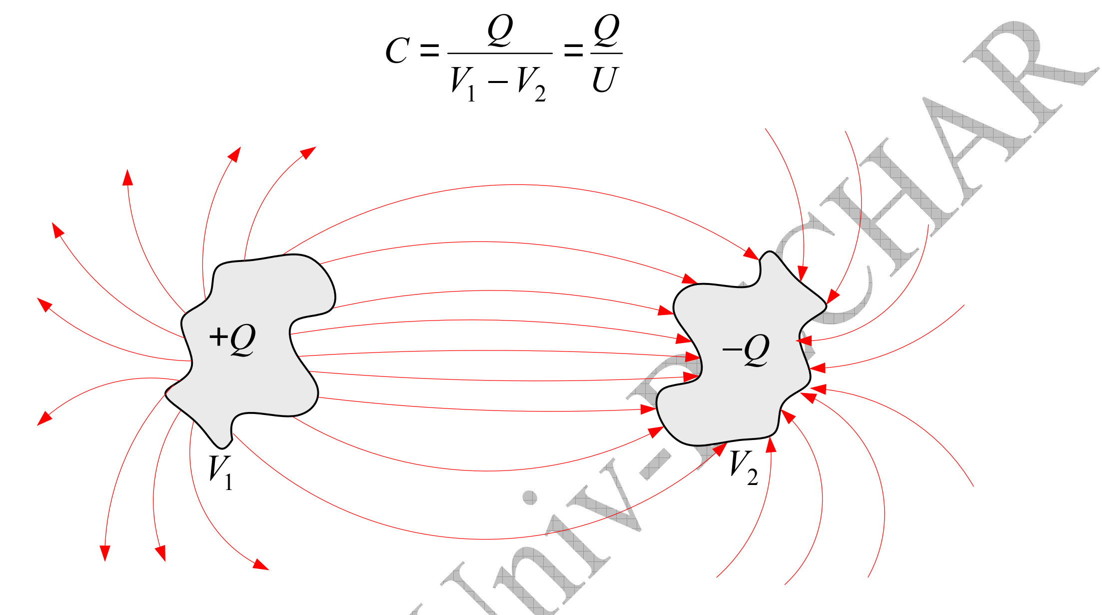


Fig 2.2 : Capacité de deux conducteurs

L'unité de la capacité : c'est le coulomb/volt $\left(C.V^{-1}\right)$, et qu'on appelle le farad $\left(F\right)$ en mémoire à Michael Faraday (1791-1867).

Ordre de grandeurs de la capacité de quelques corps :

Pour la terre, en considérant que le rayon est $R = 6400km$, sa capacité vaut $C = 70\mu F$.

Pour une sphère de rayon $r = 10cm$, de potentiel $V = 1000V$ par rapport à la terre, sa capacité est $C = 10\,pF$.

7/ Phénomène d'influence entre conducteurs chargés (ظاهرة التأثر بين النواقل المشحونة) :

Que se passe-t-il quand on place un conducteur électriquement en équilibre dans un champ électrostatique uniforme ?

Puisque les charges sont libres de se mouvoir, on va assister à un déplacement de charges positives dans le sens de $\vec{E}$, et un déplacement de charges négatives dans le sens contraire. Il se produit alors une polarisation du conducteur (apparition d'un pôle positif et d'un pôle négatif). Il en découle de cette émigration une répartition surfacique non uniforme, mais la charge totale du conducteur demeure nulle.

- **Influence partielle** (التأثير الجزئي) :

  On place la charge $+q$ au voisinage du conducteur $\left(D\right)$ non chargé. Figure2.5

La charge $+q$ produit, en tout point de l'espace qui l'entoure, et particulièrement dans (D), un champ électrique $\vec{E}$ qui oblige les électrons libres à se déplacer vers la face N ; cette région se charge donc négativement. Les électrons en quittant la face P créent un déséquilibre de charges dans cette région qui se charge positivement.

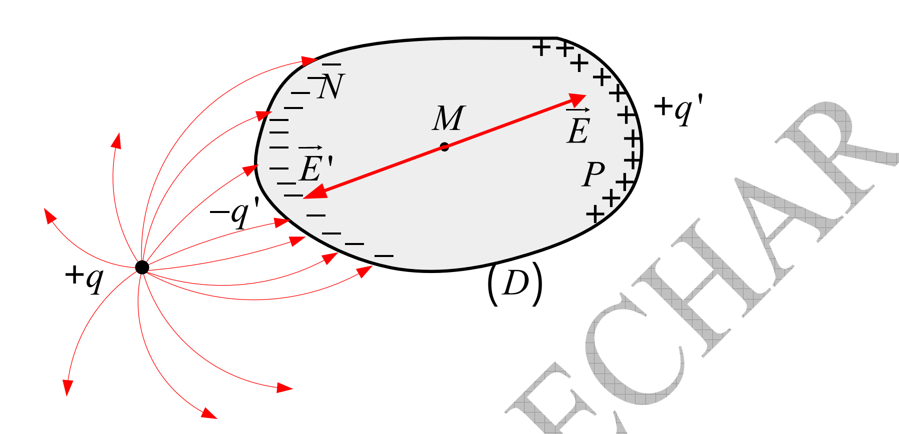


Fig 2.5 : Influence d'une charge sur un conducteur en équilibre

Les charges N et P produisent à leur tour au point M un champ $\vec{E}'$ de sens contraire à celui du champ $\vec{E}$. Le déplacement des électrons s'arrête quand $\vec{E}+\vec{E}'=\vec{0}$, le conducteur (D) acquiert donc toutes les propriétés d'un conducteur en équilibre tel que :

- Au point M : $\vec{E}_{(+q)}+\vec{E}_{(+q')}+\vec{E}_{(-q')}=\vec{0}$, le champ est nul dans le conducteur,
- Sa surface est équipotentielle,
- Les charges sont accumulées sur la surface et réparties de façon singulière. Dans ce cas, Il s'est produit une électrisation par influence. La charge totale du conducteur (D) reste nulle. Tout ce qui s'est passé est la séparation des charges égales et de signes opposés $-q'$ et $+q'$.

$|q|\succ|q'|$: cela veut dire que toutes les lignes de champ partant de la charge ponctuelle q n'atteignent pas le conducteur (D), c'est ce qui caractérise l'influence partielle. Figure 2.5

➢ **Influence totale** (التأثير الكلي) :

Deux conducteurs C_1 et C_2 sont en influence totale si le corps influencé entoure complètement le corps influent. Figure 2.6

En supposant C_1 chargé positivement, cela implique que la surface interne S_2 du conducteur C_2 se charge négativement. Dans ce cas toutes les lignes de champ issues de C_1 rejoignent la surface S_2 du conducteur C_2, donc $|Q_1|=|Q_2|$.

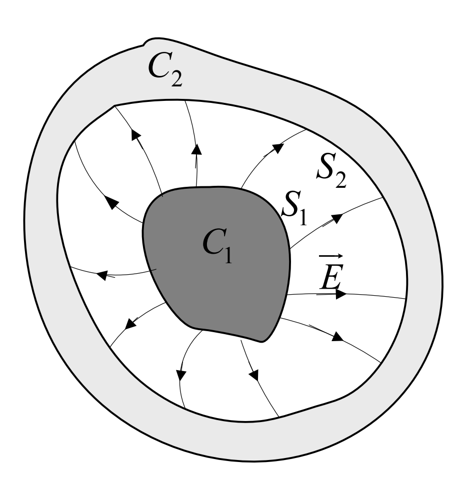


Fig 2.6 : Influence totale

8/ Théorème des éléments correspondants (نظرية العناصر المتناسبة) :

Soient les deux conducteurs voisins (A_1) et (A_2) en équilibre et portant les densités surfaciques σ_1 et σ_2. Figure 2.7

Si les deux conducteurs ne sont pas au même potentiel, des lignes de champ électrostatique relient les conducteurs (A_1) et (A_2).

Soit (C_1) un petit contour situé sur la surface de (A_1), de telle façon que toutes les lignes de champ issues de (A_1), et reposant sur (C_1), arrivent à (A_2) et dessinent sur sa surface un contour fermé (C_2). Figure 2.7

L'ensemble de ces lignes de champ constitue ce que l'on appelle tube de flux (أنبوب التدفق).

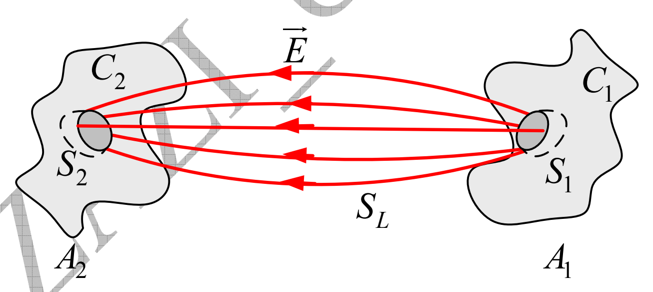


Fig 2.7 : Deux éléments correspondants

Le flux électrostatique, à travers la surface latérale S_L que dessine ce tube , est nul à cause de la perpendicularité du vecteur surface avec le vecteur champ.

Soit la surface constituée de S_L , S_1 et S_2. En appliquant le théorème de Gauss, et puisque les deux conducteurs sont en état d'équilibre, on a :

$$\Phi = \frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0} = \underbrace{\Phi_{S_L}}_{0} + \Phi_{S_1} + \Phi_{S_2} = 0$$

Si Q_1 est la charge que porte S_1 , et Q_2 la charge que porte S_2 on aura :

$$\frac{Q_1}{\varepsilon_0} + \frac{Q_2}{\varepsilon_0} = 0 \Rightarrow \boxed{Q_1 = -Q_2} \qquad \textbf{(2.3)}$$

D'où le théorème :

- **Enoncé du théorème des éléments correspondants** : deux éléments correspondants portent deux charges égales mais de sens contraires.

9/ Capacités et coefficients d'influence (سعات و معاملات التأثير) :

Soient n conducteurs en équilibre et Q_i la charge totale. Figure 2.8

Premier cas : Le conducteur A_1 est au potentiel V_1, le reste des conducteurs sont reliés à la terre (leurs potentiels sont donc nuls).

Le conducteur A_1 porte la charge : $q_{11} = C_{11}.V_1$

Le conducteur A_1 influe sur le reste des conducteurs $A_n.........A_3, A_2$ qui vont se charger par influence et porter les charges respectives :

$$q_{21} = C_{21}.V_1$$
$$q_{31} = C_{31}.V_1$$
$$..............$$
$$q_{j1} = C_{j1}.V_1$$
$$...............$$
$$q_{n1} = C_{n1}.V_1$$

La charge de tout les conducteurs réunis est égale à la charge du conducteur A_1 plus(+) les charges du reste des conducteurs qu'ils ont acquises par influence.

$$Q_1 = C_{11}.V_1 + C_{21}.V_1 + C_{31}.V_1 ... + C_{j1}.V_1 + ... + C_{n1}.V_1$$

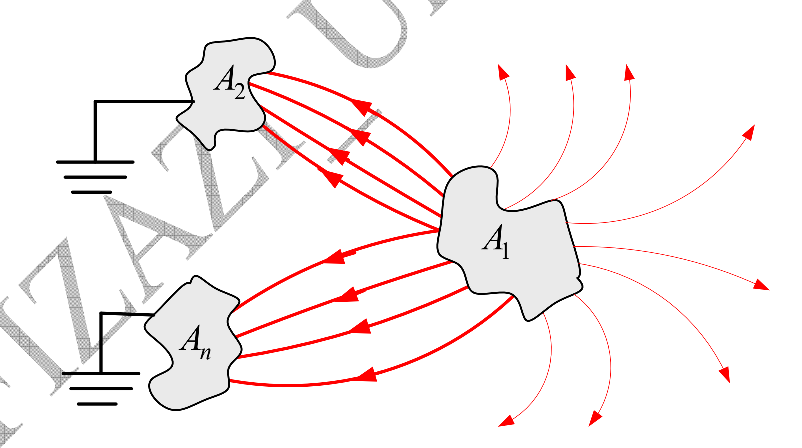


Fig 2.8 : Influence de plusieurs conducteurs par la charge A_1

Deuxième cas : Le même raisonnement pour le conducteur A_2 nous conduit aux équations :

$$q_{12} = C_{12}.V_2 \qquad q_{22} = C_{22}.V_2 \qquad q_{32} = C_{32}.V_2 \quad .... \quad q_{j2} = C_{j2}.V_2$$

$$Q_2 = C_{12}.V_2 + C_{22}.V_2 + C_{32}.V_2 ... + C_{j2}.V_2 + ... + C_{n2}.V_2$$

En répétant cette opération pour chaque conducteur, nous pouvons calculer la charge de n'importe quel conducteur i quel qu'il soit :

$$Q_i = C_{1i}.V_i + C_{2i}.V_i + C_{3i}.V_i ... + C_{ji}.V_i + ... + C_{ni}.V_i$$

On peut écrire ces expressions sous la forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ \dots \\ Q_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & \dots & C_{1j} & \dots & C_{1n} \\ C_{21} & \dots & C_{2j} & \dots & C_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ C_{n1} & \dots & C_{nj} & \dots & C_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ \dots \\ V_n \end{bmatrix}$$

➢ **Définition :**

- Les termes C_{ij} sont appelés **coefficients d'influence**.

On lit : le coefficient d'influence de j sur le conducteur i.

- Les termes C_{ii} sont appelés **capacités d'influence**.

On lit : la capacité du conducteur i en présence d'un autre conducteur. A ne pas confondre avec la capacité d'un condensateur isolé C.

➢ **Propriétés des capacités et coefficients d'influence :**

- Les coefficients d'influence sont toujours négatifs $C_{ij} \prec 0$
- Les capacités d'influence sont toujours positives $C_{ii} \succ 0$
- $C_{ij} = C_{ji}$
- $C_{ii} \geq -\sum_{j \neq i} C_{ji}$

Par exemple : $q_{11} = C_{11}V_1 \geq |q_{21}| + \dots\dots\dots\dots + |q_{n1}| = \sum_{j \neq i} |C_{ji}| V_1$

Dans le dernier cas, cela se traduit par le fait que la charge que porte (A_1) est plus grande (en valeur absolue) que la somme des charges que portent tous les autres conducteurs réunis qu'ils ont acquises sous l'influence du conducteur (A_1). La raison à cela est que les tubes de flux issus de (A_1) n'arrivent pas forcément aux autres conducteurs, ce qui ne peut se produire que si l'influence est totale, soit : $q_{11} = C_{ii}.V_i = \sum_{j \neq i} |C_{ji}|$

- Dans le cas de deux conducteurs en influence totale, on démontre que :

$$C_{11} = -C_{21} \text{ et } C_{11} = -C_{12}.$$

B/ LES CONDENSATEURS (المكثفات) :

1/ Capacité et charge d'un condensateur (سعة و شحنة مكثفة)

➢ **Définition :** un condensateur est l'ensemble de deux conducteurs A_1 et A_2 en influence électrostatique.

➢ Il y a types de condensateurs :

- A armatures rapprochées
- A influence totale

Les armatures sont séparées par un isolant qui a pour rôle d'augmenter la capacité du condensateur. Dans ce qui suit on suppose l'existence du vide entre les armatures.

Le condensateur est désigné par ce nom parce qu'il fait apparaître le phénomène de la condensation des charges électriques dans une région restreinte de l'espace. Plus la capacité est grande, plus on obtient de grandes charges électriques sous de basses tensions.

- **Constantes d'un condensateur (ثوابت المكثفة) :**
  - **Capacité d'un condensateur :** La capacité d'un condensateur est le coefficient de capacité C_{11} de l'armature A_1 en présence de A_2, $C = C_{11}$.
  - **La charge d'un condensateur :** On considère que la charge du condensateur est la charge de l'armature interne $Q = Q_{\text{int}}$.
  - **Relation fondamentale des condensateurs :**

$$\left.\begin{array}{l} Q = C_{11}V_1 + C_{12}V_2 \\ C_{11} = -C_{12} = -C_{21} \end{array}\right| \Rightarrow Q = C\left[V_1 - V_2\right] \Rightarrow \boxed{Q = CU} \qquad \textbf{(2.4)}$$

L'armature A_2 porte la charge totale :

$$\left.\begin{array}{l} Q_2 = Q_{2,ext} + Q_{2,\text{int}} \\ Q_{2,ext} = -Q_1 \end{array}\right| \Rightarrow Q_2 = Q_{2,ext} - Q_1$$

Si A_2 est reliée à la terre, on a $Q_{2,ext} = 0$, donc :

$$Q_2 = -Q_1 \qquad \textbf{(2.5)}$$

Dans le cas de l'influence partielle on obtient le même résultat. Dans ce type de condensateurs, les charges Q_1 et Q_2 correspondent aux charges réparties sur toute la surface de chacun des deux conducteurs : $Q_2 = -Q_1$.

2/ Capacités de quelques types de condensateurs :

Pour trouver la capacité C d'un condensateur, il faut calculer la relation entre sa charge Q et la tension U $(U = V_1 - V_2)$, appliquée entre les deux armatures. Pour calculer U on utilise l'expression de la circulation du champ électrique.

$$U = V_1 - V_2 = \int_1^2 \vec{E}.d\vec{l} = \frac{Q}{C}$$

a/ Condensateur sphérique (المكثفة الكروية) :

Le condensateur sphérique est constitué de deux sphères concentriques et conductrices, séparées par un isolant. Figure 2.9

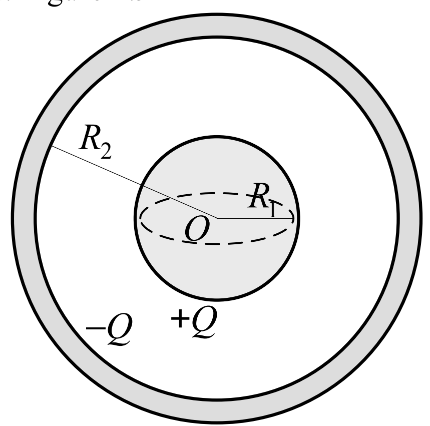


Fig 2.9 : Condensateur sphérique

On fait appel aux coordonnées sphériques qui conviennent le mieux à ce cas.
On part de la relation connue du vecteur champ électrique produit par une sphère :

$$\vec{E}(r) = K\frac{Q}{r^2}\vec{u_r}$$

On calcule la circulation du champ pour obtenir la différence de potentiel entre les deux armatures :

$$U = V_1 - V_2 = \int_{R_1}^{R_2} \vec{E}.d\vec{r} = KQ\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)$$

A la fin on arrive à l'expression de la capacité du condensateur sphérique :

$$C = \frac{Q}{U} \Rightarrow \boxed{C = 4\pi\varepsilon_0 \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1}} \quad \textbf{(2.6)}$$

b/ Condensateur cylindrique (المكثفة الأسطوانية) :

Le condensateur cylindrique est constitué de deux cylindres conducteurs coaxiaux, séparés par un isolant. Figure 2.10

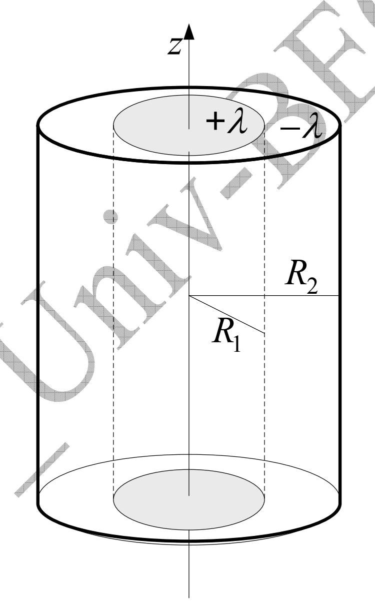


Fig 2.10 : Condensateur cylindrique

Pour ce cas, on adopte les coordonnées cylindriques et on suit le même raisonnement que précédemment : D'après le théorème de Gauss, $\vec{E}$ entre les armature est :

$$\vec{E}(\rho) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0.\rho}\vec{u_\rho}$$

λ : le densité linéique (ou linéaire)

La différence de potentiel est donc :

$$U = V_1 - V_2 = \int_{R_1}^{R_2} \vec{E}.d\vec{\rho} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{R_2}{R_1}$$

Sachant que $Q = \lambda h$, h étant la hauteur des cylindres, la capacité du condensateur cylindrique étudié est :

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{\lambda.h}{U} \Rightarrow \boxed{C = \frac{2\pi\varepsilon_0.h}{\ln\left(R_2 / R_1\right)}} \qquad \textbf{(2.7)}$$

b/ Condensateur plan (المكثفة المستوية) :

Le condensateur plan est constitué de deux plans conducteurs séparés par un isolant. Figure 2.11

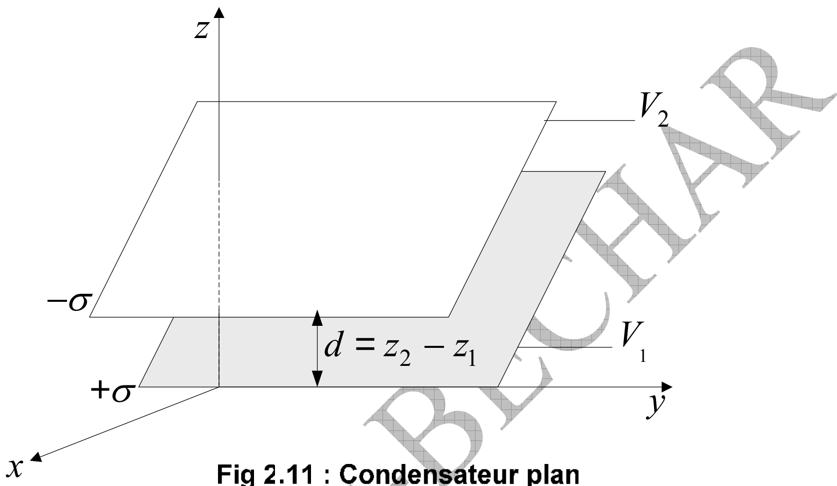


Fig 2.11 : Condensateur plan

Dans ce cas, on utilise les coordonnées cartésiennes. Le champ électrostatique entre les armatures est la composition des champs résultants des deux plans infinis, soit :

$$\vec{E} = \vec{E_1} + \vec{E_2} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{k} + \frac{-\sigma}{2\varepsilon_0}\left(-\vec{k}\right) \Rightarrow \vec{E} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{k}$$

$$U = V_1 - V_2 = \int_{z_1}^{z_2} E..dz = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\left(z_2 - z_1\right) \Rightarrow U = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}d$$

σ : Densité surfacique : $\sigma = \frac{Q}{S} \Rightarrow Q = \sigma.S$

La capacité du condensateur plan est donc :

$$C = \frac{Q}{U} \Rightarrow \boxed{C = \varepsilon_0 \frac{S}{d}} \qquad \textbf{(2.8)}$$

3/ Groupement de condensateurs (جمع المكثفات)**:**

- **Groupement en série** (الربط على التسلسل) : Figure 2.12

Fig 2.12 : Association de Condensateurs en série

Tous les condensateurs emmagasinent la même charge Q à cause du phénomène d'influence. La tension entre les extrémités de tout l'ensemble est égale à la somme des tensions :

$$U = V_0 - V_n = (V_0 - V_1) + (V_1 - V_2) + (V_2 - V_3) + \dots\dots\dots (V_{n-1} - V_n)$$

$$U = \frac{Q}{C_1} + \frac{Q}{C_2} + \frac{Q}{C_3} + \dots\dots\dots \frac{Q}{C_n}$$

Résultats : L'inverse de la capacité équivalente est égal à la somme des inverses des capacités des condensateurs montés en série :

$$\boxed{\frac{1}{C} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{C_i}} \qquad \textbf{(2.9)}$$

- **Groupement en parallèle** (الربط على التفرع) : Figure 2.13

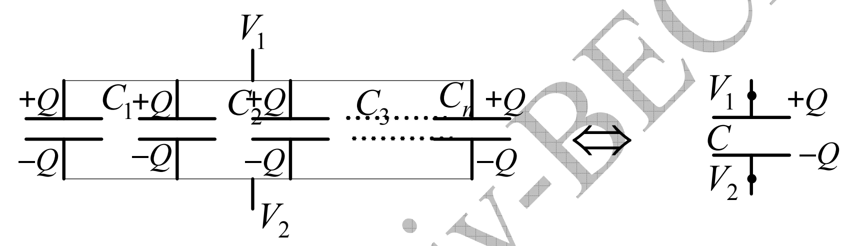


Fig 2.13 : Association de Condensateurs en parallèle

Tous les condensateurs sont soumis à la même tension U. L'expérience prouve que la charge Q_i de chaque condensateur est proportionnelle à sa capacité C_i. La charge totale est égale à la somme des charges :

$$Q = Q_1 + Q_2 + \dots\dots\dots\dots Q_n$$

$$Q = C_1.U + C_2.U + \dots\dots\dots\dots C_n.U$$

$$Q = (C_1 + C_2 + \dots\dots\dots\dots C_n).U$$

$$C.U = (C_1 + C_2 + \dots\dots\dots\dots C_n).U$$

Résultats : La capacité équivalente est égale à la somme des capacités des condensateurs montés en parallèle :

$$\boxed{C = \sum_{i=1}^{n} C_i} \qquad \textbf{(2.10)}$$

4/ Energie d'un condensateur chargé (**طاقة مكثفة مشحونة**)**:**

L'étude théorique a démontré, comme le prouvent les expériences que l'énergie emmagasinée par un condensateur chargé est proportionnelle au carré de la tension appliquée entre ses armatures. Son expression est :

$$\boxed{W = \frac{1}{2} C.U^2} \qquad \textbf{(2.11)}$$

Sachant que $Q = C.U$, on peut aussi écrire :

$$W = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} \qquad \textbf{(2.12)}$$

5/ Energie du champ électrique (طاقة الحقل الكهربائي):

La charge d'un conducteur électrique nécessite la dépense d'une énergie, la raison en est que pour ajouter une charge à un conducteur on doit fournir un travail pour vaincre la force de répulsion qui résulte des charges déjà présentes sur le conducteur. Ce travail entraîne une augmentation de l'énergie du conducteur.

Soit un conducteur au potentiel $V = \frac{q}{C}$, de capacité C et qui porte la charge q.

Si on ajoute à ce conducteur une charge élémentaire dq, en l'amenant de l'infini, le travail fourni serait :

$$dW = Vdq = \frac{q}{C}dq$$

L'augmentation totale de l'énergie du conducteur, quand la charge passe de zéro à la valeur Q ,est égal à :

$$W_E = \frac{1}{C}\int_0^Q qdq \Rightarrow \boxed{W_E = \frac{Q^2}{2C}}$$

Ce qui est compatible avec l'équation 2.12.

Dans le cas d'un conducteur sphérique, par exemple, où $C = 4\pi\varepsilon_0 R$, l'énergie du champ électrique est :

$$W_E = \frac{1}{2}\left(\frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0 R}\right)$$

6/ Densité de l'énergie électrique (كثافة الطاقة الكهربائية):

On considère à titre d'exemple un condensateur plan :

Sa capacité est : $C = \varepsilon_0 \frac{S}{d}$

L'énergie qu'il emmagasine est : $W_E = \frac{Q^2}{2C} = \frac{1}{2}CU^2 = \frac{1}{2}\frac{\varepsilon_0 S}{d}U^2$

Si on divise cette énergie par le volume du condensateur, on obtient ce que l'on appelle densité de l'énergie électrique :

$$w = \frac{W_E}{v} = \frac{1}{2}\frac{\varepsilon_0 SU^2}{dSd} \Rightarrow w = \frac{1}{2}\frac{\varepsilon_0 U^2}{d^2} \rightarrow (1)$$

On sait que l'intensité du champ électrique entre les armatures est : $E = \frac{U}{d}$

Après substitution, l'équation (1) de la densité de l'énergie électrique s'écrit :

$$\boxed{w = \frac{\varepsilon_0}{2}E^2} \qquad \textbf{(2.13)}$$

w représente **la densité de l'énergie électrique dans le vide**. Son unité est le joule par mètre cube $\left(Jm^{-3}\right)$.

En présence d'un isolant, autre que le vide, on remplace ε_0 par $\varepsilon = \varepsilon_0 . \varepsilon$, où ε représente la permittivité relative de l'isolant, tandis que ε désigne la permittivité absolue. On peut donc écrire la densité de l'énergie sous la forme :

$$\boxed{w = \frac{\varepsilon}{2} E^2} \qquad \textbf{(2.14)}$$

7/ charge et décharge d'un condensateur à travers une résistance

(شحن و تفريغ مكثفة عبر مقاومة):

➢ Charge d'un condensateur :

Soit le montage indiqué sur la figure 2.14, composé d'une résistance R montée en série avec un condensateur de capacité C. On alimente l'ensemble à l'aide d'une source de tension continue U_0.

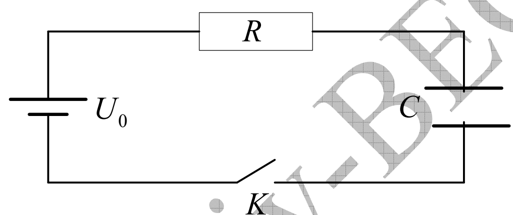


Fig 2.14 : Montage pour l'étude de la charge du condensateur

A l'instant $t = 0$, le condensateur est vide de charge, on ferme l'interrupteur K. Soit $i(t)$ l'intensité du courant électrique parcourant le circuit au temps t. Les électrons se déplacent dans le sens contraire du courant. Ces électrons quittent l'armature de haut, selon la figure 2.15, et arrivent à l'armature d'en bas qui se charge négativement. Soient $q(t)$ et $u(t)$ la charge de l'armature de haut et la tension électrique entre les armatures du condensateur (les grandeurs i, q et u sont positives par convention). Figure 2.15

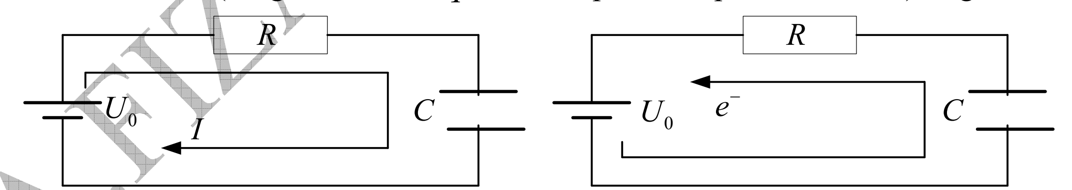


Fig 2.15 : Charge du condensateur

La loi d'Ohm nous permet d'écrire : $U_0 = Ri + U$

Sachant que $q = CU$ et $i = \dfrac{dq}{dt}$ (qui représente l'augmentation de la charge durant le temps dt).

On obtient l'équation différentielle de premier ordre :

$$U_0 = R\frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} \Rightarrow U_0 C = RC\frac{dq}{dt} + q$$

Ou :

$$U_0C - q = RC\frac{dq}{dt} \Rightarrow \frac{dq}{U_0C - q} = \frac{dt}{RC}$$

On intègre les deux membres de l'équation pour arriver à :

$$\ln(U_0C - q) = -\frac{t}{RC} + A$$

La constante d'intégration A est déterminée à partir de la condition initiale : au temps $t = 0$, la charge est $q = 0$, et par conséquent : $A = \ln U_0C$

D'où :

$$\ln(U_0C - q) - \ln U_0C = -\frac{t}{RC} \Rightarrow \ln\frac{U_0C - q}{U_0C} = -\frac{t}{RC} \Rightarrow \frac{U_0C - q}{U_0C} = \exp\left(-\frac{t}{RC}\right)$$

Finalement, l'expression de la charge du condensateur est :

$$\boxed{q(t) = U_0C\left(1 - \exp\left(-\frac{t}{RC}\right)\right)} \qquad \textbf{(2.15)}$$

- **Définition** : On appelle constante de temps la grandeur constante :

$$\boxed{\tau = RC} \qquad \textbf{(2.16)}$$

- **Durée de la charge ou décharge** : Les expériences ont prouvé , comme le prévoyait la théorie, que la durée de la charge ou la décharge d'un condensateur est estimée à : $t = 5RC = 5\tau$.

Le graphe 2.16 représente la variation de la charge en fonction du temps au cours de la charge

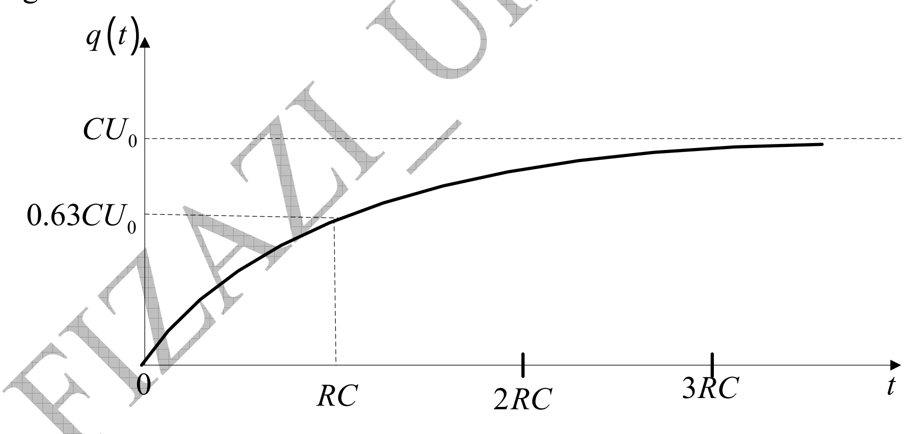


Fig 2.16 : Variation de la charge du condensateur au cours de la charge

On en déduit l'intensité du courant à chaque instant $i(t) = \dfrac{dq}{dt}$:

$$\boxed{i(t) = \frac{U_0}{R}\exp\left(-\frac{t}{RC}\right)} \qquad \textbf{(2.17)}$$

Le graphe 2.17 représente les variations de l'intensité du courant électrique en fonction du temps au cours de la charge.

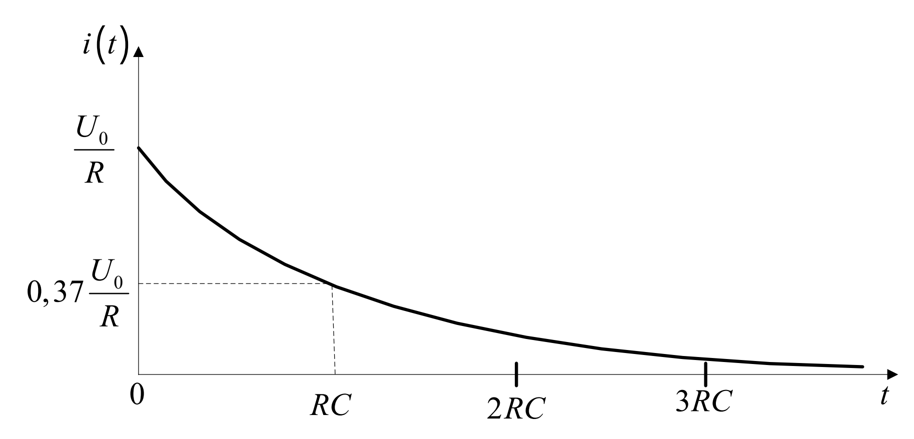


Fig 2.17 : Variation de l'intensité du courant au cours de la charge du condensateur

- **Décharge d'un condensateur :**
  - Après que le condensateur ait atteint sa charge maximale $q_0 = CU_0$, on remplace à présent (à $t=0$), la source de tension par un court circuit, comme il est indiqué sur la figure2.18.

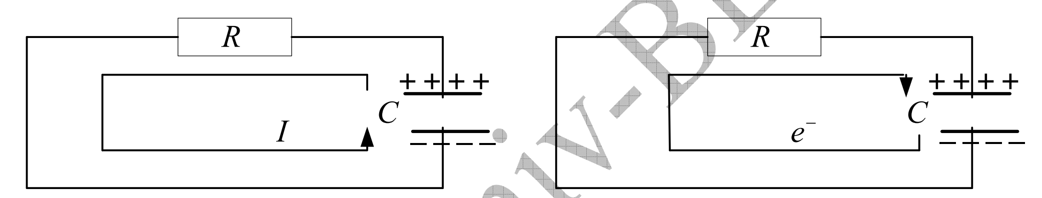


Fig 2.18 : Décharge du condensateur

Le courant a changé maintenant de sens : les électrons quittent l'armature d'en bas pour atteindre l'armature d'en haut. La charge $q(t)$ diminue au cours du temps.

En considérant toujours les grandeurs i, q et U positives par convention, on écrit la loi d'Ohm : $Ri = U$, avec $q = CU$ et $i = \frac{dq}{dt}$.

Puisque q diminue, $\frac{dq}{dt} \prec 0$ .Donc :

$$-R\frac{dq}{dt} = \frac{q}{C} \Rightarrow R\frac{dq}{q} = -\frac{dt}{C}$$

$$\ln q = -\frac{t}{RC} + B$$

La constante B est déterminée par la condition initiale :

$$t = 0 \ , \ q = q_0 = CU_0 \ ; B = \ln q_0 \Rightarrow B = \ln CU_0$$

D'où :

$$\ln q = -\frac{t}{RC} + \ln CU_0 \Rightarrow \ln\frac{q}{CU_0} = -\frac{t}{RC}$$

Donc les expressions de la charge et de l'intensité du courant instantanées sont respectivement :

$$\boxed{q = CU_0 \exp\left(-\frac{t}{RC}\right)} \qquad \textbf{(2.18)}$$

$$i = -\frac{dq}{dt} \Rightarrow \boxed{i = \frac{U_0}{R}\exp\left(-\frac{t}{RC}\right)} \qquad \textbf{(2.19)}$$

Le graphe 2.19 représente la variation de la charge en fonction du temps au cours de la décharge :

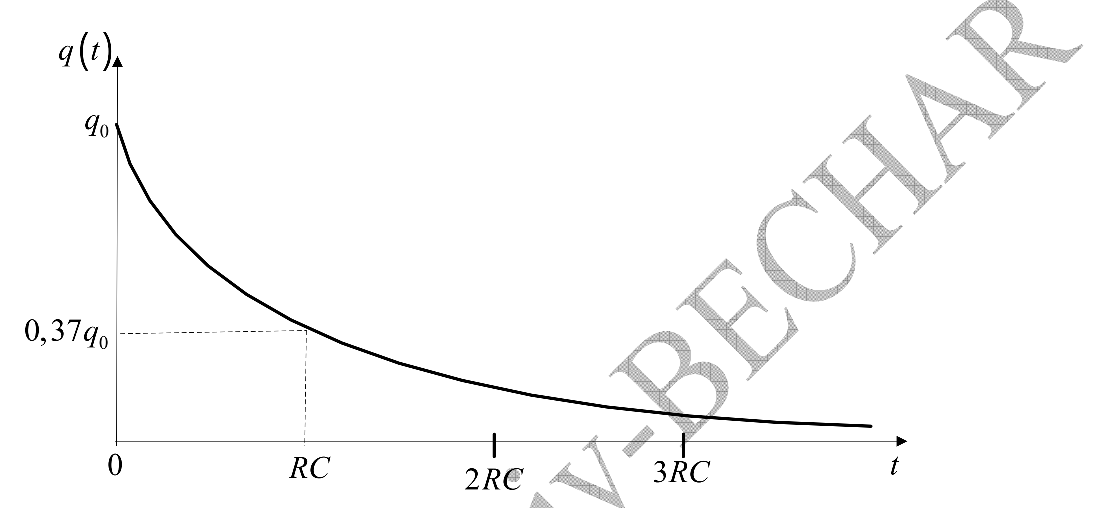


Fig 2.19 : Variation de la charge du condensateur au cours de sa décharge

Ainsi, nous terminons ce chapitre dans lequel nous avons pris connaissance des principales caractéristiques des conducteurs en équilibre, ce qui clôture l'étude de l'électrostatique.

Dans le chapitre suivant nous allons aborder les charges en mouvement. Cette étude sera faite sous le grand titre : l'ELECTROCINETIQUE.